Семестр 2 (2019), занятие 5. Приближенное вычисление значения функции

Требуется вычислить значение функции f в точке x с точностью $\varepsilon > 0$ путем суммирования ряда Тейлора

$$f(x) \approx \sum_{i=1}^{k} a_i, \quad |a_k| < \varepsilon.$$

Вычисление $\sin x$ и $\cos x$

С использованием формул приведения задача вычисления $\sin x$ ($\cos x$) может быть сведена к вычислению $\sin y$ ($\cos y$), где $y \in [0, \pi/4]$.

Вычисление очередных слагаемых ряда Тейлора для $\sin y$ проводить по следующим рекуррентным соотношениям

$$\begin{aligned} a_1 &= y, \\ a_{i+1} &= -a_i \tfrac{y^2}{2i(2i+1)}. \end{aligned}$$

Вычисление очередных слагаемых ряда Тейлора для $\cos y$ проводить по следующим рекуррентным соотношениям

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ a_{i+1} &= -a_i \tfrac{y^2}{2i(2i-1)}. \end{aligned}$$

Вычисление e^x

При $x < 0$ необходимо воспользоваться соотношением

$$e^x = \frac{1}{e^{-x}},$$

которое позволяет свести задачу к случаю положительного аргумента.

Пусть $x > 0$. Представим аргумент в виде суммы целой и дробной частей

$$x = [x] + \{x\}.$$

Тогда

$$e^x = e^{[x]} e^{\{x\}}.$$

Каждый множитель данного произведения вычисляется отдельно. Значение $e^{[x]}$ вычисляется при помощи алгоритма быстрого возведения в степень. Заголовочный файл `math.h` содержит константу `M_E`, которую можно использовать в качестве приближенного значения числа e.

Величина $e^{\{x\}}$ вычисляется путем суммирования ряда Тейлора с использованием рекуррентного соотношения

$$a_{i+1} = a_i \frac{\{x\}}{i}.$$

Вычисление $\ln x$

При $0 < x < 1$, используя соотношение

$$\ln \frac{1}{x} = -\ln x,$$

сведем задачу к случаю $x > 1$.

Пусть $x > 1$. Подберем натуральное число n таким образом, чтобы имело место представление

$$x = (\sqrt{e})^n (1 + y), \quad |y| < 1.$$

Тогда искомое значение вычисляется как

$$\ln x = \frac{n}{2} + \ln(1 + y).$$

Далее необходимо воспользоваться разложением

$$\ln(1 + y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \dots$$