Семестр 2 (2020), занятие 2

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке [a, b]. Обозначим

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

Требуется вычислить величину I с заданной точностью $\varepsilon > 0$.

Квадратурные формулы

Приближенные значения интеграла можно находить с помощью подходящих выражений вида

$$I \approx \sum_{i=1}^{k} c_i f(x_i).$$

Формула в правой части этого выражения называется квадратурной формулой. Величины c_i называются весами, а x_i – узлами.

Приведем примеры квадратурных формул. Формула трапеций

$$I \approx \frac{b-a}{2}\,(f(a)+f(b)).$$

Формула средних прямоугольников

$$I \approx (b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Формула Симпсона

$$I \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right).$$

Формула Гаусса

$$I \approx \frac{b-a}{2}\,(f(x_1)+f(x_2)),$$

где

$$x_{1,2} = \frac{1}{2}\,(a+b) \pm \frac{\sqrt{3}}{6}\,(b-a).$$

Алгебраическим порядком точности квадратурной формулы называется наибольшее число m такое, что квадратурная формула дает точное значение интеграла для всех алгебраических многочленов степени меньшей или равной m.

Алгебраический порядок точности формул трапеций и средних прямоугольников равен 1, а формул Симпсона и Гаусса равен 3.

Составные формулы

Разделим отрезок $[a, b]$ на $n \geqslant 1$ равных частей. На каждом отрезке разбиения вычислим заданную квадратурную формулу. Просуммируем полученные значения. Полученную сумму I_n назовем приближенным значением интеграла, вычисленным по составной формуле.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} h &= \tfrac{b-a}{n}, \\ x_i &= a+ih, \\ f_i &= f(x_i). \end{aligned}$$

Составная формула трапеций

$$I_n = \frac{h}{2}\,(f_0+f_n+2\sum_{i=1}^{n-1} f_i).$$

Составная формула средних прямоугольников

$$I_n = h\sum_{i=1}^{n} f_{i-\frac{1}{2}}.$$

Составная формула Симпсона (n - четно)

$$\begin{aligned} I_n = \frac{h}{3}\Big[& f_0+f_n+2(f_2+f_4+\ldots+f_{n-2}) \\ & +4(f_1+f_3+\ldots+f_{n-1})\Big]. \end{aligned}$$

Программная реализация

Функция вычисления составной формулы должна иметь следующий прототип.

```
typedef double (*func_t)(double);
double
integrateN(func_t f, double a, double b, int n);
```

Приближенное вычисление интеграла

Для вычисления интеграла строится последовательность приближений

$$I_2, I_4, I_8, \ldots, I_{2^n}, \ldots$$

Необходимо сформулировать критерий остановки процесса построения приближений, а также формально определить используемое понятие точность вычисления $\varepsilon > 0$.

Будем предполагать, что рассмативаемая квадратурная формула имеет алгебраический порядок точности $p-1$.

Формула Рунге

Погрешность приближения интеграла с помощью значения, вычисленного по составной формуле, может быть записана в следующем виде

$$I - I_n = ch^p + O(h^{p+1}).$$

При малых значениях h имеет место следующая оценка для главного члена погрешности приближения (первая формула Рунге)

$$ch^p \;\approx\; \delta \;=\; \frac{I_{2n} - I_n}{1 - 2^{-p}},$$

Критерием остановки вычислительного процесса является выполнение неравенства $|\delta| < \varepsilon$. Искомым приближением является величина

$$I \;\approx\; I_n + \delta.$$

Экстраполяция по Ричардсону

Погрешность приближения интеграла с помощью значения, вычисленного по составной формуле, может быть записана в следующем виде

$$I - I_{2n} = \acute{c}\left(\frac{h}{2}\right)^p + O(h^{p+1})$$

При малых значениях h имеет место следующая оценка для главного члена погрешности приближения

$$\acute{c}\left(\frac{h}{2}\right)^p \;\approx\; \acute{\delta} \;=\; \frac{I_{2n} - I_n}{2^p - 1}.$$

Критерием остановки вычислительного процесса является выполнение неравенства $|\acute{\delta}| < \varepsilon$. Искомым приближением является величина

$$I \;\approx\; I_{2n} + \acute{\delta}.$$

Программная реализация

Функция вычисления приближенного значения интеграла должна иметь следующий прототип.

```
int integrate(func_t   f,
              double   a,
              double   b,
              double   e,
              double  *r);
```

Тестовые функции

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= 2\,x,\\
f_2(x) &= 3\,x^2,\\
f_3(x) &= 4\,x^3,\\
f_4(x) &= 5\,x^4,\\
f_5(x) &= \tfrac{1}{1+x^2},\\
f_6(x) &= \sqrt{1-x^2},\\
f_7(x) &= 2\,e^{2x},\\
f_8(x) &= \tfrac{\ln(x+1)}{x^2+1},\\
f_9(x) &= \tfrac{x^2}{1+e^{\sin x}}.
\end{aligned}$$

Обязательные тесты

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \tfrac{1}{1+x^2}dx &= \tfrac{\pi}{4},\\
\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}dx &= \tfrac{\pi}{2},\\
\int_0^1 2\,e^{2x}dx &= e^2 - 1,\\
\int_0^1 \tfrac{\ln(x+1)}{x^2+1}dx &= \tfrac{\pi}{8}\,\ln 2,\\
\int_{-1}^1 \tfrac{x^2}{1+e^{\sin x}}dx &= \tfrac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Константы

Заголовочный файл `math.h` содержит прототипы функций `exp`, `sqrt`, `sin`, `cos`, а также константы `M_PI`, `M_E` и `M_LN2` ($\ln 2$).

При некоторых настройках компилятора `gcc` (например, `-pedantic -std=c99`) объявления констант в файле `math.h` могут быть недоступны. В этом случае их необходимо определить самостоятельно.

```
#ifndef M_PI
#define M_PI 3.14159265358979323846
#endif

#ifndef M_E
#define M_E 2.7182818284590452354
#endif

#ifndef M_LN2
#define M_LN2 0.69314718055994530942
#endif
```