Задачи для 1 курса (2024-2025 уч. год.)

Обработка подмножества (косвенные ссылки). Задачи с матрицами.

Пусть задан массив $\mathbf{a} = \{a_i\}$ длины n. Назовем подмножеством массива часть из его элементов, стоящих на позициях (индексах), определяемых некоторым условием или явно указанных в отдельном массиве индексов. Примерами подмножеств могут служить можество элементов, имеющих четные индексы, множество элементов, которые делятся на указанное число, множество элементов, образующих возрастающие участки, множество элементов, индексы которых указаны в дополнительном массиве ind длины $k \le n$ и т.п.

Ставится задача обработки или модификации указанного подмножества данного массива. При этом предполагается, что элементы массива, не входящие в данное подмножество, не меняются, а их взаимное расположение сохраняется при любых модификациях подмножества. В частности, если при обработке подмножества требуется добавление или удаление элементов, то элементы, не входящие в подмножество, могут сдвигаться, но ни в коем случе не переставляться друг относительо друга.

В этом случае иногда можно упростить задачу, если ввести косвенный доступ к элементам массива. Это означает, что мы вводим дополнительную процедуру эффективного определения индексов элементов подмножества по их порядковому номеру в этом подмножестве. То есть, фактически задаем функцию $j = ind(i)$, где i есть порядковый номер элемента в подмножестве, а j — его индекс в исходном массиве. Теперь работа элементами `a[j]`, разбросанными по исходному массиву, сводится к работе с элементами `a[ind(i)]`, где индекс i последовательно пробегает множество $i = 0, 1, \ldots$.

В простых случаях функцию $ind(i)$ можно определить явно (например, множество четных индесов $j = 2*i$), в других случаях можно задать ее “таблично”, т.е. массивом ind, где $ind[i] = j$. Например, если проверка принадлежности элемента подмножеству является сложной процедурой, то можно предварительным проходом определить индексы подмножества, сохранить их в массиве, и потом просто работать, индексируя элементы через этот массив.

Примерами задач для одномерных массивов могут служить следующие.

Задача 1. Упорядочить все четные элементы массива по возрастанию, а нечетные оставить на своих прежних местах.

Задача 2. Упорядочить по возрастанию все элементы массива с четными индексами, а элементы с нечетными индексами оставить на своих прежних местах.

Задача 3. Упорядочить по возрастанию все элементы массива, которые образуют убывающие участки в исходном массиве, а элементы, которые образовывали неубывающие участки, оставить на прежних местах без изменения.

Задача 4. Дан массив A длины N и (упорядоченный по возрастанию) массив индексов ind длины $K < N$. Нужно упорядочить множество элементов, имеющих индексы из ind, используя только позиции из ind, а остальные элементы массива оставить на своих исходных местах.

Задача 5. Дан массив целых чисел и целое число x. Множество элементов массива, которые превосходят число x нужно переставить в обратном порядке в рамках их начальных позиций. Множество оставшихся элементов нужно циклически сдвинуть на одну позицию влево.

Понятно, что можно сформулировать большое количество подобных задач, комбинируя критерии выбора подмножества элементов и операции, которые с этими подмножествами требуется совершить.

В качестве примера приведем список нескольких задач для матриц — двумерных массивов, в которых элементами будут являться уже строки или стобцы матриц, а задаваемые критерии и преобразования будут предполагать обработку строк или столбцов как одномерных числовых массивов. В действительности, как нетрудно увидеть, с идейной точки зрения тут ничего не меняется. Просто для выполнения проверок, преобразований и перестановок нужно предусмотреть отдельные функции, которые будут вызываться в нужных местах алгоритма.

Задача 6. Дана матрица целых чисел и два натуральных числа M и N. Рассмотрим подмножество столбцов матрицы, в которых есть хотя бы один элемент, который при делении на M дает остаток N. Если в этом подмножестве есть группы столбцов с последовательно идущими номерами, то в каждой такой группе оставить только первый и последний столбцы, а “промежуточные” стобцы из матрицы удалить. Столбцы матрицы, не входящие в данное подмножество, должны сохранить свой взаимный порядок.

Задача 7. Дана матрица целых чисел и два натуральных числа M и N. Рассмотрим подмножество столбцов матрицы, в которых все элементы принадлежат диапазону $[M, N]$. Если в этом подмножестве есть группы одинаковых столбцов с последовательно идущими номерами, то в каждой такой группе оставить только один столбец, а остальные “копии” из матрицы удалить. Столбцы матрицы, не входящие в данное подмножество, должны сохранить свой взаимный порядок.

Задача 8. Дана матрица целых чисел и два натуральных числа M и N. Рассмотрим подмножество столбцов матрицы, в которых все элементы при делении на M дают остаток N. Если в этом подмножестве есть группы одинаковых столбцов с последовательно идущими номерами, то удалить такую группу столбцов из метрицы, если количество столбцов в ней делится на N. Столбцы матрицы, не входящие в данное подмножество, должны сохранить свой взаимный порядок.

Задача 9. Дана матрица целых чисел и натуральное число M. Рассмотрим подмножество столбцов матрицы, в которых все элементы больше M. Если в этом подмножестве есть группы столбцов, “упорядоченных по возрастанию”, то в каждой такой группе оставить только первый и последний столбцы, а остальные “промежуточные” стобцы из матрицы удалить. Упорядоченность понимается в смысле покомпонентного сравнения всех элементов столбцов, т.е. j-й столбец не преводсходит (j+1)-го столбца, если a(i,j) <= a(i, j+1) для всех i. Столбцы матрицы, не входящие в данное подмножество, должны сохранить свой взаимный порядок.

Задача 10. Дана матрица целых чисел и два натуральных числа M и N. Рассмотрим подмножество столбцов матрицы, в которых у всех элементов M-тый бит равен 0. Если в этом подмножестве есть группы из более, чем N столбцов с последовательно идущими номерами, то оставить в ней только первые N столбцов, а остальные столбцы из этой группы удалить. Столбцы матрицы, не входящие в данное подмножество, должны сохранить свой взаимный порядок.

Задача 11. Дана матрица целых чисел и два натуральных числа M и N. Рассмотрим подмножество столбцов матрицы, в которых все элементы при делении на M дают остаток N. Упорядочить по возрастанию столбцы матрицы в рамках данного подмножества, считая, что сравнение столбцов соответствует сравнению их максимальных элементов. Столбцы матрицы, не входящие в данное подмножество, должны сохранить свое местоположение в матрице.

Задача 12. Дана матрица целых чисел и два натуральных числа M и N. Рассмотрим подмножество столбцов матрицы, в которых есть хотя бы один элемент, который при делении на M дает остаток N. Упорядочить по возрастанию столбцы матрицы в рамках данного подмножества, считая, что сравнение столбцов соответствует сравнению сумм их элементов. Столбцы матрицы, не входящие в данное подмножество, должны сохранить свое местоположение в матрице.

Задача 13. Дана матрица целых чисел и два натуральных числа M и N. Рассмотрим подмножество столбцов матрицы, в которых есть хотя бы один элемент, который при делении на M дает остаток N. Упорядочить по убыванию столбцы матрицы в рамках данного подмножества, считая, что сравнение столбцов соответствует сравнению их минимальных элементов. Столбцы матрицы, не входящие в данное подмножество, должны сохранить свое местоположение в матрице.

Задача 14. Дана матрица целых чисел и натуральное число M. Рассмотрим подмножество столбцов матрицы, в которых все элементы больше M. Упорядочить по возрастанию столбцы матрицы в рамках данного подмножества, считая, что сравнение столбцов соответствует сравнению сумм модулей их отрицательных элементов. Столбцы матрицы, не входящие в данное подмножество, должны сохранить свое местоположение в матрице.

Задача 15. Дана матрица целых чисел и два натуральных числа M и N. Рассмотрим подмножество столбцов матрицы, в которых нет элементов, содержащих в двоичной записи ровно M единиц. Упорядочить по убыванию столбцы матрицы в рамках данного подмножества, считая, что сравнение столбцов соответствует сравнению общего количества единиц в двоичных записях всех элементов каждого столбца. Столбцы матрицы, не входящие в данное подмножество, должны сохранить свое местоположение в матрице.

Задача 16. Дана матрица целых чисел и два натуральных числа M и N. Рассмотрим подмножество столбцов матрицы, в которых все элементы при делении на M дают остаток N. Разобъем столбцы этого подмножества на пары по их последовательному порядку в подмножестве (последний столбец может не иметь пары, если их нечетное число). В каждой паре заменим элементы первого столбца на минимум из него самого и элемента второго стобца с тем же i. Второй столбец каждой пары удалить из матрицы. Если последний столбец подмножества не имеет пары, то он не обрабатывается и сохраняется как есть. Столбцы матрицы, не входящие в данное подмножество, должны сохранить свой взаимный порядок.

Задача 17. Дана матрица целых чисел и два натуральных числа M и N. Рассмотрим подмножество столбцов матрицы, в которых все элементы принадлежат диапазону $[M, N]$. Разобъем столбцы этого подмножества на пары по их последовательному порядку в подмножестве (последний столбец может не иметь пары, если их нечетное число). В каждой паре заменим элементы a(i,j) первого столбца на минимум из элементов второго столбца, индекс которых не превосходит i. Второй столбец каждой пары удалить из матрицы. Если последний столбец подмножества не имеет пары, то он не обрабатывается и сохраняется как есть. Столбцы матрицы, не входящие в данное подмножество, должны сохранить свой взаимный порядок.

Задача 18. Дана матрица целых чисел и два натуральных числа M и N. Рассмотрим подмножество столбцов матрицы, в которых все элементы делятся на M. Разобъем столбцы этого подмножества на пары по их последовательному порядку в подмножестве (последний столбец может не иметь пары, если их нечетное число). Каждую пару столбцов заменим на один столбец, элементы которого a(i,j) есть сумма количества единиц в битовом представлении элементов с одним индексом i в этой паре Если последний столбец подмножества не имеет пары, то он не обрабатывается и сохраняется как есть. Столбцы матрицы, не входящие в данное подмножество, должны сохранить свой взаимный порядок.

Задача 19. Дана матрица целых чисел и два натуральных числа M и N. Рассмотрим подмножество столбцов матрицы, в которых все элементы делятся на M. Разобъем столбцы этого подмножества на пары по их последовательному порядку в подмножестве (последний столбец может не иметь пары, если их нечетное число). Каждую пару столбцов заменим на один столбец, элементы которого a(i,j) есть максимум из двух чисел, составленых из младщих N бит элементов с одим индексом i в этой паре. Если последний столбец подмножества не имеет пары, то он не обрабатывается и сохраняется как есть. Столбцы матрицы, не входящие в данное подмножество, должны сохранить свой взаимный порядок.

Задача 20. Дана матрица целых чисел и два натуральных числа M и N. Рассмотрим подмножество столбцов матрицы, в которых хотя бы один элемент делит нацело M. Разобъем столбцы этого подмножества на пары по их последовательному порядку в подмножестве (последний столбец может не иметь пары, если их нечетное число). От каждой пары оставим в матрице только один столбец, а именно тот, который имеет больше элементов, делящихся на N (при равенстве оставляем первый из пары), а другой удаляем. Если последний столбец подмножества не имеет пары, то он не обрабатывается и сохраняется как есть. Столбцы матрицы, не входящие в данное подмножество, должны сохранить свой взаимный порядок.